e3a concours

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de MATHEMATIQUES 2

Filière MP

durée 3 heures

Nota: les cinq sujets sont indépendants et peuvent être traités, à la rigueur, dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très distinctement *leur numéro. Leur 5ème question est, en général, la plus difficile.*
Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés.*

SUJET 1

Soit $f(x) = x^x$, x réel > 0. On peut noter $f^{(n)}(x)$, ou $\frac{d^n f}{dx^n}$, ou $D^n f$, pour la dérivée $n^{ème}$ de f.

1 Dresser un tableau de variations de f, et dessiner sa courbe représentative

2 On pose $c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$. Calculer c_1 et c_2.

3 Établir que $y = f(x)$ satisfait à l'équation différentielle $y' = y\,\ell nx + y$.

En déduire la relation $c_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(c_n + \frac{c_{n-1}}{1} - \frac{c_{n-2}}{2} + \frac{c_{n-3}}{3} - \frac{c_{n-4}}{4} + \ldots\right)$. .

4 Démontrer que $|c_n| \leq 1$. Qu'en déduit-on pour le rayon de convergence R de la série $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$?

5 Prouver que $f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n (x-1)^n$ sur un intervalle J ouvert que l'on précisera.

SUJET 2

Soient $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$, $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^n dt$, $L_n(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt$ où n est entier ≥ 1 et s réel > 0.

1 Calculer $L_n(s)$. Comparer alors a_n et I_n.

2 Déterminer $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

3 En déduire le rayon de convergence R de $f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$.
Cette série entière converge-t-elle en R ? Et en $-R$?

4 Établir la relation $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{tx\,dt}{e^t - tx}$.

5 Dresser un tableau de variations de $f(x)$ en précisant si les limites aux bornes sont finies ou non.

SUJET 3

Soit f la fonction de la variable réelle x telle que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1 Préciser l'ensemble de définition $\mathscr{E}$ de f.

2 Montrer que cette fonction est ***strictement*** décroissante .

3 Déterminer la limite de f pour x tendant vers $+\infty$.

4 Prouver que $f(x) \sim \frac{2}{x^2}$ pour x tendant vers 0 . [On peut comparer f à une intégrale.]

5 Soit $J = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Démontrer que J ***existe*** et que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

SUJET 4

On définit f, fonction ***paire*** de période 2π, par $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \in [0;\pi]$.

1 Cette fonction est-elle C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$?

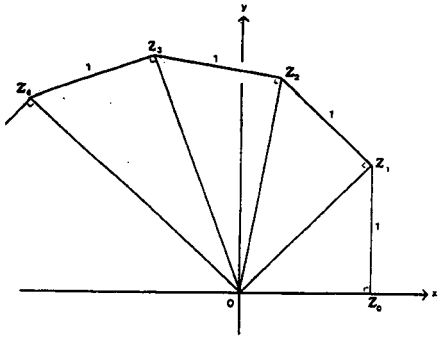
2 On cherche la série de Fourier de f , soit $a_0 + \sum_{n\geq 1} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$. Calculer a_0 et b_n.

3 On pose $G(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$. Établir que $G(x) = \frac{1-\cos(x^2)}{2x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}\,dt$. En déduire l'existence de $L = \lim_{+\infty} G(x)$. On admettra que $L = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4 Déterminer alors une constante D telle que $a_n \sim D.n^{-3/2}$.

5 Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

SUJET 5



Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on définit la suite de points (z_n) de la façon suivante : $z_0 = 1$, et le triangle Oz_nz_{n+1} , ***rectangle*** en z_n , est orienté dans le ***sens direct***, avec $|z_{n+1} - z_n| = 1$ [figure ci-contre]. La réunion des segments $[z_n, z_{n+1}]$ constitue donc une ligne polygonale infinie L de forme spirale.

1 Calculer $|z_n|$.

2 Montrer que le nombre réel $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\frac{1}{\sqrt{k}}$ est un argument possible pour le nombre complexe z_n , $n \geq 1$.

3 (3a) Déterminer la ***nature*** de la série de terme général $u_n = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} - \text{Arctan}\left(n^{-1/2}\right)$.

(3b) Établir l'***existence*** d'une constante réelle C , telle que $\alpha_n = 2\sqrt{n} - C + O\left(n^{-1/2}\right)$.

(3c) Démontrer que cette constante C est ***strictement positive*** .

4 On parcourt la ligne polygonale L dans le sens direct à partir de z_0 . Montrer que l'on rencontre la demi-droite $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ en une infinité de points, que l'on appellera successivement M_0 $(= z_0)$, M_1 , M_2 , ... , M_k , ... L'unique arête de la ligne polygonale L qui contient le point M_k , $k \geq 1$, est désignée par $]z_{v(k)-1}, z_{v(k)}]$. Montrer que $v(k) \sim k^2\pi^2$, quand k tend vers l'infini.

5 Plus précisément, établir que $v(k) = k^2\pi^2 + kC\pi + \beta(k)$, où $\beta(k)$ désigne une suite ***bornée***.